DOĞRUSAL PROGRAMLAMAYA GİRİŞ

Doğrusal programlama, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan matematiksel bir tekniktir.(Öztürk, A., 2011).

Doğrusal programlama problemlerinin kullanımı ve çözümü ile ilgili önemli gelişmeler İkinci Dünya Savaşı sonrasında olmuş ve sivil sektörde de yoğun bir şekilde uygulama alanı bulmuştur.(Erdem, İ., 2017).

Doğrusal Programlama (DP), doğrusal karar modelleriyle ilgili kavram ve teknikler bütünüdür. Doğrusal programlama, bütün model parametrelerinin kesin olarak bilindiğini varsayan deterministik bir tekniktir.

Çok sayıda değişkenli ve kısıt denklemli DP problemleri bilgisayar programları yardımıyla hızlıca çözümlenebildiği için birçok alanda önemli uygulamalardan söz edilebilir. DP'nin bazı uygulama alanları aşağıda verilmiştir:

1. Üretim Planlaması ve Envanter Kontrolü
2. Ulaştırma ve Lojistik Problemleri
3. Atama Problemleri
4. Personel Programlaması
5. Reklam Seçimi Problemleri
6. Sermaye Bütçeleme Problemleri
7. Portföy Seçimi Problemleri
8. Dinamik Yatırım Planlaması
9. Karışım Problemleri
10. Beslenme (Diyet) Problemleri

Doğrusal programlama, değişkenlere ve kısıtlayıcılara bağlı kalarak amaç fonksiyonunu en uygun(maksimum veya minimum) kılmaya çalışır.

Doğrusal programlama modelinden tutarlı sonuçların elde edilmesi, aşağıdaki varsayımlara bağlıdır.

a) **Doğrusallık Varsayımı:** Bir DP modelinin amaç fonksiyonu ve kısıt denklemleri doğrusal olmalıdır. Bir başka deyişle x_j'ler birinci dereceden değişkenler olmalıdır. Bir işletmenin girdileri ile çıktıları arasında doğrusal bir ilişki olduğu varsayılır.

b) **Toplanabilirlik Varsayımı:** Doğrusal programlamada her fonksiyon (amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların sol tarafındaki fonksiyonlar) ilişkin olduğu faaliyetlerin bireysel katkılarının toplamıdır.

Bu varsayımı kısıtlayıcının sol tarafındaki fonksiyon için ele alırsak; değişik üretim faaliyetlerine kaynak olan üretim girdilerinin toplamının, her bir işlem için ayrı ayrı kullanılan girdilerin toplamına eşit olduğunu gösterir. Örneğin, bir ürünün üretimi için üç saate, diğer ürünün üretimi için beş saate gereksinim var ise bu iki ürünü birden üretmek için sekiz saat gereklidir.

c) **Bölünebilirlik Varsayımı:** Bölünebilirlik varsayımı ile karar değişkenlerinin optimal çözüm değerlerinin kesirli değerler alabileceği kabul edilir. Örneğin herhangi bir DP modelinin optimal çözümünde 4.6 adet araba üretileceği gibi bir üretim çıktısı sonucuna ulaşılabilir. Kesirli optimal çözüm değerleri "Tam Sayı Programlama" algoritmalarıyla tamsayılaştırılır.

d) **Kesinlik Varsayımı:** Bir doğrusal programlama modelindeki her bir parametrenin kesin olarak bilindiği ve değişmediği kabul edilir. Yani, birim başına kar ya da maliyetlerin (c_j), her faaliyet için gerekli olan kaynak miktarlarının (a_{ij}) ve mevcut kaynak miktarlarının (b_i) kesin olarak bilindiği varsayılır.

Bu varsayımın kabul edilmesiyle DP problemlerinin çözümü kolaylaşmaktadır. Ancak, uygulamada bu parametrelerin sık sık değişme eğiliminde olması, DP'de duyarlılık analizi çalışmalarının yürütülmesini gerektirmektedir. Problemin optimum çözümü elde edildikten sonra duyarlılık analizi başlığı altında parametrelerdeki değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkileri incelenebilir.

Bir doğrusal programlama modeli oluşturulurken,

- Öncelikle karar değişkenleri belirlenir.
- Daha sonra amaç kriterine göre amaç fonksiyonu oluşturulur.
- Kısıtlayıcı durumlar dikkate alınarak kısıt denklemleri oluşturulur.
- Pozitiflik şartı ilave edilerek model kurma işlemi tamamlanır.

Doğrusal programlama probleminin matematiksel modeli genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$Amaç\ Fonksiyonu$:

$$[\text{ Max / Min Z }] \text{ veya } [\text{max/min } f(x)\ ] : \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$Kısıt\ Denklemleri$: (1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (\leq, \geq, =)\ b_i \qquad , \quad i = 1, \ldots\ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad , \quad j = 1, \ldots\ldots. n$$

Burada,

$Z\ veya$ f(x) : Amaç fonksiyonu

x_j : Karar değişkenleri

c_j : Amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayıları olan sabitler

a_{ij} : Kısıtların sol tarafında bulunan teknolojik katsayılar

b_i : Sağ taraf sabitleri

anlamındadır.

(1) ile ifade edilen modelin açık gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$Max(veya\ Min)\ Z\colon\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$Kısıtlayıcılar(Kısıtlar)$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n\ \geq 0$$

(1) ile ifade edilen modelin matris notasyonu ile gösterimi ise aşağıdaki gibidir:

$$Max(veya\ Min)\ Z: \quad c^T X$$

$$Kısıtlayıcılar(Kısıtlar): \quad AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

Burada,

$$c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)\ ;\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T\ ;\ \ b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T\ \ ;\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dir.

Doğrusal programlama problemine ilişkin, yaygın olarak kullanılan tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Uygun Bölge: İşaret kısıtlaması da dahil, tüm kısıtlayıcıları sağlayan karar değişkenlerinin değer kümesidir. Uygun bölge bir bakıma, tüm uygun çözümlerin değer kümesidir.

Köşe noktaları: Uygun bölgenin yapısı gereği, belirli sayıda uygun nokta olacaktır. Bu noktalar, köşe noktaları olarak bilinir.

Uygun Çözüm: Karar değişkenleri değerlerinin özel bir kümesinin, tüm kısıtlayıcıları sağlayan çözümüne uygun çözüm denir. Uygun çözüm, uygun bölgede tek noktada olabilir.

Optimal Çözüm: Amaç fonksiyonunu maksimum veya minimum yapan uygun çözüme optimal çözüm denir.

Bir maksimizasyon problemi için optimal çözüm, uygun çözüm alanında en büyük amaç fonksiyonu değerini veren noktadır. Bir minimizasyon problemi için optimal çözüm, uygun çözüm alanında en küçük amaç fonksiyonu değerini veren noktadır.

Optimal Değer: Optimal çözüme bağlı olarak, amaç fonksiyonun aldığı değer “optimal değer” olarak adlandırılır.

Doğrusal Programlama model kurma örnekleri

Örnek: Dumanlı Dağlar(D.D.) şirketinin üst yönetimi, gelecek dönemde iki farklı üründen kaçar adet üretmeleri gerektiğini belirlemek istemektedir. Aşağıdaki tablo bu ürünlerin üretiminin gerçekleştiği üç ayrı atölyedeki iş gücünün mevcut durumunu, bir birimlik ürün üretiminde atölyelerdeki iş gücünün ne kadarının kullanıldığını ve ürünlerin her birinin getireceği net karı göstermektedir.(Erdem, İ., 2017).

Atölye	**Ürün 1**	**Ürün 2**	**Mevcut iş gücü**
A1	1 saat	0.35 saat	100 saat
A2	0.3 saat	0.20 saat	36 saat
A3	0.2 saat	0.50 saat	50 saat
Kar/Birim	**30 TL**	**15 TL**	

Şirket karını maksimum yapmak istediğine göre, "her bir üründen kaçar adet üretmelidir?" sorusuna cevap verebileceğimiz modeli kurunuz.

Karar değişkenlerini,

x_1: Ürün $1'den$ üretilecek miktar

x_2: Ürün $2'den$ üretilecek miktar

biçiminde tanımlarsak model aşağıdaki gibi olur:

$$Max\ Z : 30x_1 + 15x_2$$

$$Kısıtlar : \quad 1x_1 + 0.35x_2 \leq 100 \quad (A1'deki\ mevcut\ işgücü\ kısıtı)$$

$$0.30x_1 + 0.20x_2 \leq 36 \quad (A2'deki\ mevcut\ işgücü\ kısıtı)$$

$$0.20x_1 + 0.50x_2 \leq 50 \quad (A3'teki\ mevcut\ işgücü\ kısıtı)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Örnek: Bir kişi sadece et, süt ve yumurta yiyerek perhiz yapmaktadır. Bu kişinin günde en az 1mg A vitamini, 30mg C vitamini ve 10mg D vitamini alması gerekmektedir. Buna karşılık besinlerle aldığı kolesterol 80birim/gün'ü geçmemelidir. Aşağıdaki tabloda, gıda maddelerinin besin içerikleri ve fiyatları verilmiştir. Kişinin amacı, bu perhizi en ucuz yolla gerçekleştirmektir. Amaca uygun doğrusal programlama modelini kurunuz.(Erdem, İ., 2017).

Gıda maddesi	**A Vitamini (mg)**	**C Vitamini (mg)**	**D Vitamini (mg)**	**Kolesterol (br)**	**Fiyat/br.**
Et (kg)	1	10	100	50	26 pb
Süt (lt)	1	-	100	70	2.25 pb
Yumurta(adet)	10	10	10	120	0.21 pb
Gereksinimler	$\geq \mathbf{1}$	$\geq \mathbf{30}$	$\geq \mathbf{10}$	$\leq \mathbf{80}$	

Karar değişkenlerini,

x_1: *Bir günde tüketilecek Et miktarı (kg)*

x_2: *Bir günde tüketilecek Süt miktarı (lt)*

x_3: *Bir günde tüketilecek Yumurta miktarı (adet)*

biçiminde tanımlarsak model aşağıdaki gibi olur:

$$Min\ Z : 26x_1 + 2.25x_2 + 0.21x_3$$

$$Kısıtlar: \quad 1x_1 + 1x_2 + 10x_3 \geq 1 \quad (A\ vitamini\ kısıtı)$$

$$10x_1 + 0x_2 + 10x_3 \geq 30 \quad (C\ vitamini\ kısıtı)$$

$$100x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 \quad (D\ vitamini\ kısıtı)$$

$$50x_1 + 70x_2 + 120x_3 \leq 80 \quad (Kolesterol\ kısıtı)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA PROBLEMLRİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Grafik Çözüm Yöntemi

Doğrusal Programlama modelinin çözüm yöntemlerinden en basit olanı iki veya üç değişkenli modeller için grafik yöntemdir. Bu yöntemde ilk önce kısıtlayıcıların belirlediği uygun çözüm bölgesi belirlenir. Bu bölgenin konveks bir bölge olduğu ispatlanmıştır. Konveks bölgenin amaç fonksiyonunu maksimum veya minimum yapan noktaları ekstrem noktaları olduğu gerçeğinden yola çıkarak bu bölgedeki tüm ekstrem noktalar için amaç fonksiyonunun aldığı değeri belirleyerek bunlardan amaca uygun olanı seçilir ve optimal çözüme ulaşılmış olur.

İki değişkenli doğrusal programlama problemlerinin grafik yöntemle çözümünde yapılacak işlemler:

- Kısıtlayıcıların grafiğini çizmek
- Uygun bölgeyi belirlemek
- Köşe noktaları incelenerek optimal çözümün bulunması

biçiminde özetlenebilir.

Örnek: (Öztürk, A. S:75). Aşağıdaki problemi grafik yöntem ile çözelim.

$$Max\ Z : 20x_1 + 15x_2$$

$$\begin{aligned} Kısıtlar: \quad & x_1 \leq 100 && (teyp) \\ & x_2 \leq 100 && (radyo) \\ & 50x_1 + 35x_2 \leq 6000 && (nakit\ durumu) \\ & 20x_1 + 15x_2 \geq 2000 && (aktif/pasif\ oranı) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$Max\ Z : 20x_1 + 15x_2$

k1: $x_1 \leq 100$

k2: $x_2 \leq 100$

k3: $50x_1 + 35x_2 \leq 6000$

k4: $20x_1 + 15x_2 \geq 2000$

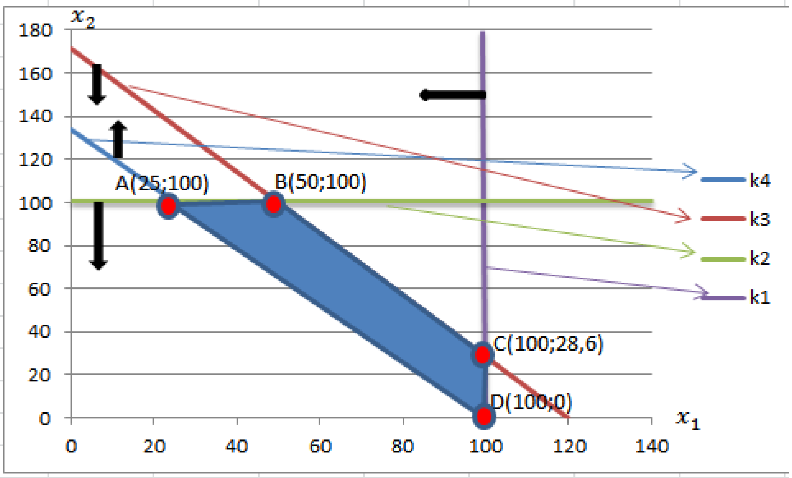
	x1=	x2=
k1	100	0
k2	0	100
k3	0	171,4
	120	0
k4	0	133,33
	100	0

A: k2,k4

B: k2,k3

C: k1,k3

D: k1,k4



Örnek: (Öztürk, A. S:83). Aşağıdaki problemi grafik yöntem ile çözelim.

$$Min\ Z : 2x_1 + 6x_2$$

$$Kısıtlar: \quad 2x_1 + 4x_2 \leq 1600$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$$

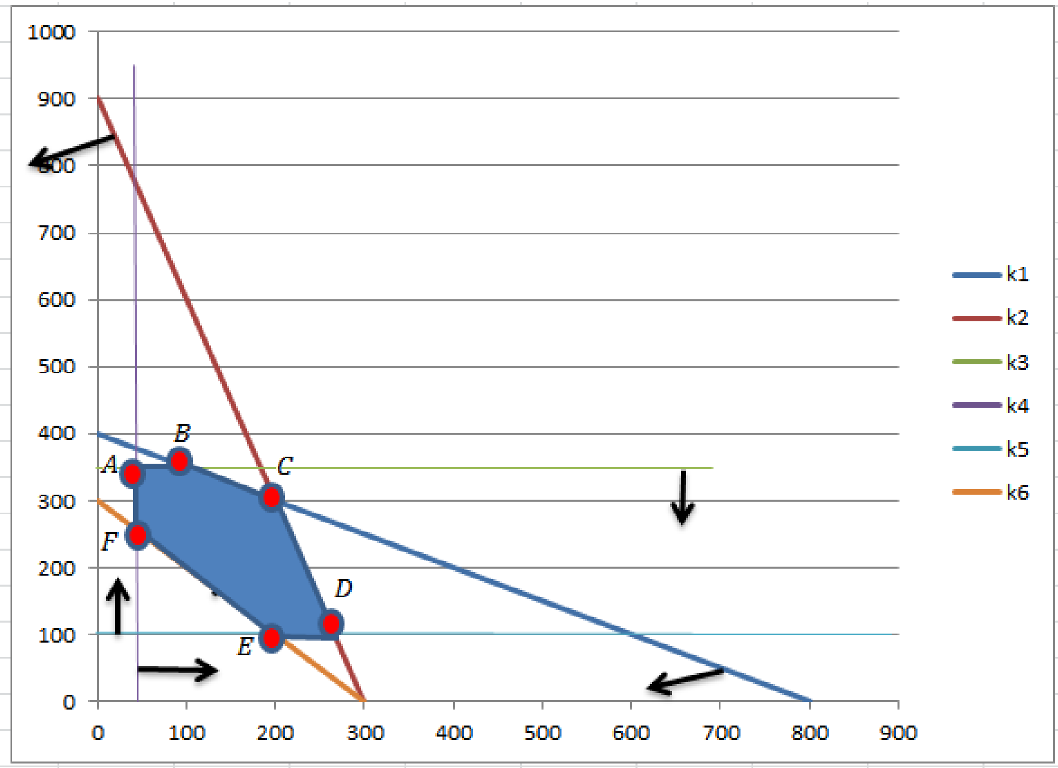
$$x_2 \leq 350$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 \geq 100$$

$$x_1 + x_2 \geq 300$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



		Z
A: k3,k4	A(50;350)	2200
B: k1,k3	B(100;350)	2300
C: k1,k2	C(200;300)	2200
D: k2,k5	D(266,66;100)	1133,32
E: k5,k6	E(200;100)	**1000**
F: k4,k6	F(50;250)	1600

Örnek . Aşağıdaki (D.P.) modelini grafik metod ile çözünüz ?

$$Max\ Z : 30x_1 + 40x_2$$

$$Kısıtlar:\ 4x_1 + 2x_2 \leq 16$$

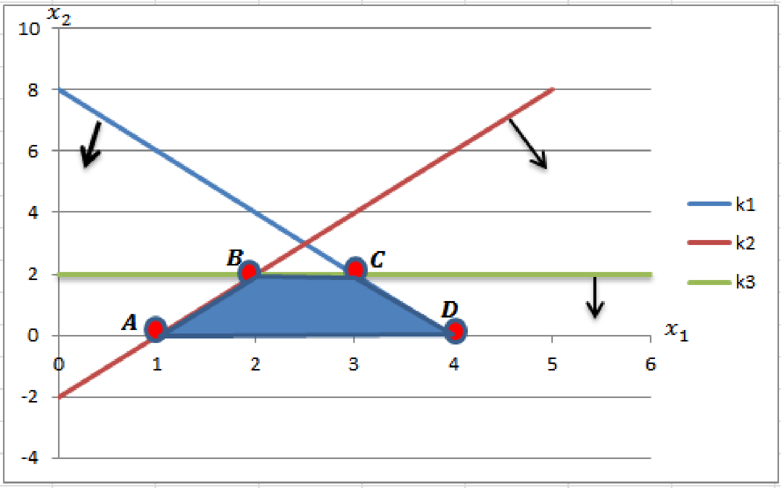
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	$Max\ Z : 30x_1 + 40x_2$		
k1:	$Kısıtlar\ \ 4x_1 + 2x_2 \leq 16$		
k2:		$2x_1 - x_2 \geq 2$	
k3:		$x_2 \leq 2$	
		Z	
A(1;0)		30	
B(2;2)	B: k2,k3	140	
C(3;2)	C: k1,k3	**170**	
D(4;0)		120	

	x1=	x2=
k1	0	8
	4	0
k2	0	-2
	1	0
	5	8
k3	0	2



Örnek . Aşağıdaki (D.P.) modelini grafik metod ile çözünüz ?

$$Max\ Z : 50x_1 + 20x_2$$

$$Kısıtlar:\ 2x_1 + 4x_2 \leq 400$$

$$100x_1 + 50x_2 \leq 8000$$

$$x_1 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Örnek . Aşağıdaki (D.P.) modelini grafik metod ile çözünüz ?

$$Min\ Z : 24x_1 + 28x_2$$

$$Kısıtlar: \ 5x_1 + 4x_2 \leq 2000$$

$$x_1 \geq 80$$

$$x_1 + x_2 \leq 60$$

$$x_2 \geq 100$$

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

Örnek . Aşağıdaki (D.P.) modelini grafik metod ile çözünüz ?

$$Max\ Z : 7x_1 + 10x_2$$

$$Kısıtlar: \ 36x_1 + 24x_2 \leq 360$$

$$6x_1 + 12x_2 \leq 132$$

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

Simpleks çözüm yöntemi